

第2课时 二项式定理的综合应用

【学习目标】 1.熟练掌握二项式定理.2.能够利用二项式定理解决两个多项式乘积的特定项问题.3.掌握二项展开式中系数最大(小)问题.4.能利用二项式定理解决整除(余数)问题.

【导语】

假如今天是星期一,7天后是星期几?16天后是星期几? 8^{2022} 天后是星期几?怎样准确快速地得到答案?



期

一、两个多项式乘积的特定项

例1 (1) $(1+2x)^3(1-x)^4$ 的展开式中,含 x 项的系数为()

A. 10 B. -10 C. 2 D. -2

(2)已知 $(1+ax)(1+x)^5$ 的展开式中,含 x^2 的项的系数为5,则 a 等于()

A. -4 B. -3 C. -2 D. -1

反思感悟 求多项式积的特定项的方法——“双通法”

所谓的“双通法”是根据多项式与多项式的乘法法则得到, $(a+bx)^n(s+tx)^m$ 的展开式中一般项为 $T_{k+1} \cdot T_{r+1} = C_n^k a^{n-k} (bx)^k \cdot C_m^r s^{m-r} (tx)^r$,再依据题目中对指数的特殊要求,确定 r 与 k 所满足的条件,进而求出 r, k 的取值情况.

跟踪训练1 (1) $(1+2x^2)(1+x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数为()

A. 12 B. 16 C. 20 D. 24

(2) $(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为_____. (用数字作答)

二、系数的最值问题

例2 已知 $\left(\frac{1}{2}+2x\right)^n$ 的展开式中前三项的二项式系数之和等于79,求展开式中系数最大的项.

反思感悟 求展开式中系数最大项与求二项式系数最大项是不同的,需根据各项系数的正、负变化情况,一般采用列不等式(组)、解不等式(组)的方法求解.一般地,如果第 $(k+1)$ 项的系数最大,则与之相邻两项第 k 项,第 $(k+2)$ 项的系数均不大于第 $(k+1)$ 项的系数,由此列不等式组可确定 k 的范围,再依据 $k \in \mathbf{N}$ 来确定 k 的值,即可求出最大项.

跟踪训练2 已知 $\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x^2}\right)^{10}$ 的展开式中,求该展开式中系数最大的项.

三、整除和余数问题

例3 (1)试求 2019^{10} 除以8的余数;

(2)求证: $3^{2n+2}-8n-9(n \in \mathbf{N}_+)$ 能被64整除.

反思感悟 利用二项式定理可以解决求余数和整除的问题,通常需将底数化成两数的和与差的形式,且这种转化形式与除数有密切的关系.

跟踪训练 3 求证: $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4 (n \in \mathbb{N}_+)$ 能被 25 整除.

■ 课堂小结 ■

1. 知识清单: (1)两个多项式乘积的特定项. (2)系数的最值问题. (3)整除与余数问题.
2. 方法归纳: 双通法.
3. 常见误区: 项、项数、二项式系数、系数等概念的辨析.

随堂演练

1. $(x^2+2)\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式的常数项为()
A. 25 B. -25 C. 5 D. -5
2. $(1-2x)^5$ 的展开式中系数最大的项是()
A. 第 3 项 B. 第 4 项 C. 第 5 项 D. 第 6 项
3. $(x+1)^4(x-1)$ 的展开式中 x^3 的系数是_____.
4. $2^{30}-3$ 除以 7 的余数为_____.

课时对点练

基础巩固

1. $(x^2+2)\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^5$ 的展开式的常数项是()
A. -3 B. -2 C. 2 D. 3
2. $(1-x)^4(1-\sqrt{x})^3$ 的展开式中 x^2 的系数是()
A. -6 B. -3 C. 0 D. 3
3. 1.02^6 的近似值(精确到 0.01)为()
A. 1.12 B. 1.13 C. 1.14 D. 1.20
4. $(1+x)^8(1+y)^4$ 的展开式中 x^2y^2 的系数是()
A. 56 B. 84 C. 112 D. 168

5. 设 $n \in \mathbf{N}_+$, 则 $C_n^0 1^n 8^0 + C_n^1 1^{n-1} 8^1 + C_n^2 1^{n-2} 8^2 + C_n^3 1^{n-3} 8^3 + \cdots + C_n^{n-1} 1^1 8^{n-1} + C_n^n 1^0 8^n$ 除以 9 的余数为 ()
- A. 0 B. 8 C. 7 D. 2
6. (多选) $(1+x^2)(2+x)^4$ 的展开式中 ()
- A. x^3 的系数为 40 B. x^3 的系数为 32 C. 常数项为 16 D. 常数项为 8
7. 在 $\left(\frac{1}{x}-1\right)(\sqrt{x}+1)^5$ 的展开式中常数项等于_____.
8. $\left(1+\frac{1}{x}\right)(1+x)^4$ 的展开式中含 x 的项为_____.
9. 用二项式定理证明 $11^{10}-1$ 能被 100 整除.
10. 求 $(\sqrt[3]{x^2}+3x^2)^5$ 的展开式中系数最大的项.

综合运用

11. 当 n 为正奇数时, $7^n + C_n^1 \cdot 7^{n-1} + C_n^2 \cdot 7^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} \cdot 7$ 被 9 除所得的余数是 ()
- A. 0 B. 2 C. 7 D. 8
12. 若 $(x^2-a)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ 的展开式中 x^6 的系数为 30, 则 a 等于 ()
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2
13. 设 $a \in \mathbf{Z}$, 且 $0 \leq a < 13$, 若 $51^{2020}+a$ 能被 13 整除, 则 a 等于 ()
- A. 0 B. 1 C. 11 D. 12
14. 中国南北朝时期的著作《孙子算经》中, 对同余除法有较深的研究. 设 $a, b, m(m>0)$ 为整数, 若 a 和 b 被 m 除所得的余数相同, 则称 a 和 b 对模 m 同余, 记为 $a \equiv b \pmod{m}$. 若 $a = C_{20}^0 + C_{20}^1 \cdot 2 + C_{20}^2 \cdot 2^2 + \cdots + C_{20}^{20} \cdot 2^{20}$, $a \equiv b \pmod{10}$, 则 b 的值可以是 ()
- A. 2 021 B. 2 022 C. 2 023 D. 2 024

拓展探究

15. 已知 $f(x) = (1+2x)^m + (1+4x)^n (m, n \in \mathbf{N}_+)$ 的展开式中含 x 项的系数为 36, 求展开式中含 x^2 项的系数的最小值为_____.
16. 求 $(1+x+x^2)^8$ 展开式中 x^5 的系数.